3.3. Ispitivanje toka funkcije

13. 11. 2020.

Fotografija: Derrin Twiford

Ispitivanje toka funkcije

…je standardni postupak za skiciranje grafa funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ispitivanje toka funkcije

...je standardni postupak za skiciranje grafa funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Objasnit ćemo ga na sljedećem primjeru:

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

1. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo domenu D funkcije f.

1. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo domenu D funkcije f.

$$D = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}.$$

2. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo je li f:

- **parna**: za sve $x \in D$ vrijedi $-x \in D$ i $f(-x) = f(x)$

  Primjer. Funkcije $e^x + e^{-x}$ i $\frac{x^4 - 3x^2 \cos x + \sin^2 x}{x^2+1}$ su parne.

2. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo je li f:

- **parna**: za sve $x \in D$ vrijedi $-x \in D$ i $f(-x) = f(x)$

  Primjer. Funkcije $e^x + e^{-x}$ i $\frac{x^4 - 3x^2 \cos x + \sin^2 x}{x^2+1}$ su parne.

- **neparna**: za sve $x \in D$ vrijedi $-x \in D$ i $f(-x) = -f(x)$

  Primjer. Funkcije $e^x - e^{-x}$, $\operatorname{tg} x$, $x^2 \sin x$ i x^3 su neparne.

2. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo je li f:

- **parna**: za sve $x \in D$ vrijedi $-x \in D$ i $f(-x) = f(x)$

  Primjer. Funkcije $e^x + e^{-x}$ i $\frac{x^4 - 3x^2 \cos x + \sin^2 x}{x^2+1}$ su parne.

- **neparna**: za sve $x \in D$ vrijedi $-x \in D$ i $f(-x) = -f(x)$

  Primjer. Funkcije $e^x - e^{-x}$, $\operatorname{tg} x$, $x^2 \sin x$ i x^3 su neparne.

Funkcija f nije ni parna ni neparna ($f(-x) = -x^3 - 6x^2 - 9x$). Precizno obrazloženje: npr.

$$f(-1) = -16 \neq 4 = f(1) \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ nije parna},$$

$$f(-1) = -16 \neq -4 = -f(1) \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ nije neparna}.$$

2. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo je li f:

- **periodična** s periodom $\tau > 0$: za sve $x \in D$ vrijedi $x \pm \tau \in D$ i $f(x+\tau) = f(x)$.

2. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo je li f:

- **periodična** s periodom $\tau > 0$: za sve $x \in D$ vrijedi $x \pm \tau \in D$ i $f(x+\tau) = f(x)$.

  Najmanji period (ako postoji) zove se **temeljni period** funkcije f.

2. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo je li f:

- **periodična** s periodom $\tau > 0$: za sve $x \in D$ vrijedi $x \pm \tau \in D$ i $f(x+\tau) = f(x)$.

  Najmanji period (ako postoji) zove se **temeljni period** funkcije f.

  Primjer. Za sve $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\varphi \in \mathbb{R}$:

  - funkcije $\sin(\omega x + \varphi)$ i $\cos(\omega x + \varphi)$ su periodične s temeljnim periodom $\frac{2\pi}{|\omega|}$

2. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo je li f:

- **periodična** s periodom $\tau > 0$: za sve $x \in D$ vrijedi $x \pm \tau \in D$ i $f(x+\tau) = f(x)$.

  Najmanji period (ako postoji) zove se **temeljni period** funkcije f.

  Primjer. Za sve $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\varphi \in \mathbb{R}$:
  - funkcije $\sin(\omega x + \varphi)$ i $\cos(\omega x + \varphi)$ su periodične s temeljnim periodom $\frac{2\pi}{|\omega|}$
  - funkcije $\operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ i $\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ su periodične s temeljnim periodom $\frac{\pi}{|\omega|}$.

2. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo je li f:

- **periodična** s periodom $\tau > 0$: za sve $x \in D$ vrijedi $x \pm \tau \in D$ i $f(x+\tau) = f(x)$.

  Najmanji period (ako postoji) zove se **temeljni period** funkcije f.

  Primjer. Za sve $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\varphi \in \mathbb{R}$:
  - funkcije $\sin(\omega x + \varphi)$ i $\cos(\omega x + \varphi)$ su periodične s temeljnim periodom $\frac{2\pi}{|\omega|}$
  - funkcije $\operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ i $\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ su periodične s temeljnim periodom $\frac{\pi}{|\omega|}$.

Funkcija f nije periodična.

3. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo **nultočke** funkcije f: $x \in D$ za koje je $f(x) = 0$.

3. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo **nultočke** funkcije f: $x \in D$ za koje je $f(x) = 0$.

Napomena. Nultočke funkcije f su x-koordinate sjecišta Γ_f sa x-osi.

3. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo **nultočke** funkcije f: $x \in D$ za koje je $f(x) = 0$.

Napomena. Nultočke funkcije f su x-koordinate sjecišta Γ_f sa x-osi.

Nultočke funkcije f su 0 i 3.

3. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo **nultočke** funkcije f: $x \in D$ za koje je $f(x) = 0$.

Napomena. Nultočke funkcije f su x-koordinate sjecišta Γ_f sa x-osi.

Nultočke funkcije f su 0 i 3.

Odredimo i intervale pozitivnosti/negativnosti funkcije f.

3. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo **nultočke** funkcije f: $x \in D$ za koje je $f(x) = 0$.

Napomena. Nultočke funkcije f su x-koordinate sjecišta Γ_f sa x-osi.

Nultočke funkcije f su 0 i 3.

Odredimo i intervale pozitivnosti/negativnosti funkcije f. Jedini su kandidati za njihove rubove:

- rubovi domene D

3. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo **nultočke** funkcije f: $x \in D$ za koje je $f(x) = 0$.

Napomena. Nultočke funkcije f su x-koordinate sjecišta Γ_f sa x-osi.

Nultočke funkcije f su 0 i 3.

Odredimo i intervale pozitivnosti/negativnosti funkcije f. Jedini su kandidati za njihove rubove:

- rubovi domene D

  Primjer. Rubovi skupa $\langle -\infty, 3] \cup \{4\} \cup \langle 5, 2\pi\rangle \cup \langle 2\pi, +\infty\rangle$ su $-\infty$, 3, 4, 5, 2π i $+\infty$.

3. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo **nultočke** funkcije f: $x \in D$ za koje je $f(x) = 0$.

Napomena. Nultočke funkcije f su x-koordinate sjecišta Γ_f sa x-osi.

Nultočke funkcije f su 0 i 3.

Odredimo i intervale pozitivnosti/negativnosti funkcije f. Jedini su kandidati za njihove rubove:

- rubovi domene D

  Primjer. Rubovi skupa $\langle -\infty, 3] \cup \{4\} \cup \langle 5, 2\pi\rangle \cup \langle 2\pi, +\infty\rangle$ su $-\infty$, 3, 4, 5, 2π i $+\infty$.
- točke $x \in D$ u kojima f nije neprekidna

3. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo **nultočke** funkcije f: $x \in D$ za koje je $f(x) = 0$.

Napomena. Nultočke funkcije f su x-koordinate sjecišta Γ_f sa x-osi.

Nultočke funkcije f su 0 i 3.

Odredimo i intervale pozitivnosti/negativnosti funkcije f. Jedini su kandidati za njihove rubove:

- rubovi domene D

  Primjer. Rubovi skupa $\langle -\infty, 3] \cup \{4\} \cup \langle 5, 2\pi\rangle \cup \langle 2\pi, +\infty\rangle$ su $-\infty$, 3, 4, 5, 2π i $+\infty$.
- točke $x \in D$ u kojima f nije neprekidna
- nultočke funkcije f.

3. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo **nultočke** funkcije f: $x \in D$ za koje je $f(x) = 0$.

Napomena. Nultočke funkcije f su x-koordinate sjecišta Γ_f sa x-osi.

Nultočke funkcije f su 0 i 3.

Odredimo i intervale pozitivnosti/negativnosti funkcije f. Jedini su kandidati za njihove rubove:

- rubovi domene D

  Primjer. Rubovi skupa $\langle -\infty, 3] \cup \{4\} \cup \langle 5, 2\pi\rangle \cup \langle 2\pi, +\infty\rangle$ su $-\infty$, 3, 4, 5, 2π i $+\infty$.
- točke $x \in D$ u kojima f nije neprekidna
- nultočke funkcije f.

Rubovi domene $D = \mathbb{R} = \langle -\infty, +\infty\rangle$: $-\infty$, $+\infty$.

3. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo **nultočke** funkcije f: $x \in D$ za koje je $f(x) = 0$.

Napomena. Nultočke funkcije f su x-koordinate sjecišta Γ_f sa x-osi.

Nultočke funkcije f su 0 i 3.

Odredimo i intervale pozitivnosti/negativnosti funkcije f. Jedini su kandidati za njihove rubove:

- rubovi domene D

  Primjer. Rubovi skupa $\langle -\infty, 3] \cup \{4\} \cup \langle 5, 2\pi\rangle \cup \langle 2\pi, +\infty\rangle$ su $-\infty$, 3, 4, 5, 2π i $+\infty$.
- točke $x \in D$ u kojima f nije neprekidna
- nultočke funkcije f.

Rubovi domene $D = \mathbb{R} = \langle -\infty, +\infty\rangle$: $-\infty$, $+\infty$.

	$-\infty$ … 0	0 … 3	3 … $+\infty$
f			

3. korak

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Odredimo **nultočke** funkcije f: $x \in D$ za koje je $f(x) = 0$.

Napomena. Nultočke funkcije f su x-koordinate sjecišta Γ_f sa x-osi.

Nultočke funkcije f su 0 i 3.

Odredimo i intervale pozitivnosti/negativnosti funkcije f. Jedini su kandidati za njihove rubove:

- rubovi domene D

  Primjer. Rubovi skupa $\langle -\infty, 3] \cup \{4\} \cup \langle 5, 2\pi\rangle \cup \langle 2\pi, +\infty\rangle$ su $-\infty$, 3, 4, 5, 2π i $+\infty$.
- točke $x \in D$ u kojima f nije neprekidna
- nultočke funkcije f.

Rubovi domene $D = \mathbb{R} = \langle -\infty, +\infty\rangle$: $-\infty$, $+\infty$.

	$-\infty$	0	3 $+\infty$
f	$-$	$+$	$+$

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

Globalni ekstremi funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- **točka globalnog minimuma**: $x_0 \in D$ takav da je
$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \text{za sve } x \in D$$
- **točka globalnog maksimuma**: $x_0 \in D$ takav da je
$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \text{za sve } x \in D.$$

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

Globalni ekstremi funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- **točka globalnog minimuma**: $x_0 \in D$ takav da je

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \text{za sve } x \in D$$

- **točka globalnog maksimuma**: $x_0 \in D$ takav da je

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \text{za sve } x \in D.$$

Lokalni ekstremi funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

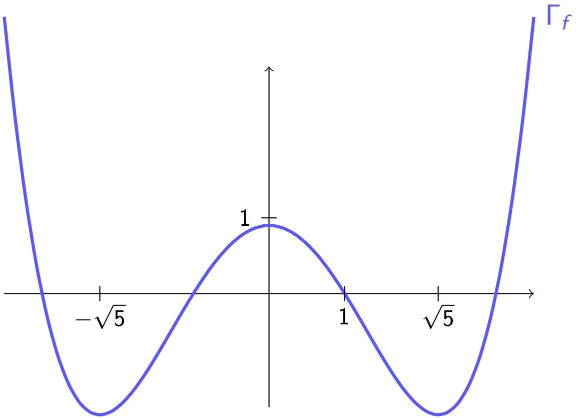
- **točka lokalnog minimuma**: $x_0 \in D$ sa svojstvom da postoji otvoreni interval $I \ni x_0$ takav da je

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \text{za sve } x \in D \cap I.$$

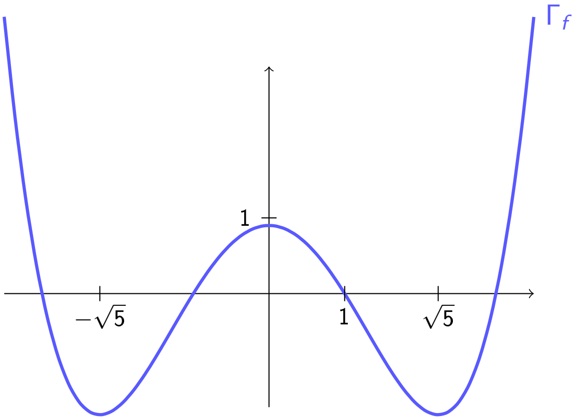
- **točka lokalnog maksimuma**: $x_0 \in D$ sa svojstvom da postoji otvoreni interval $I \ni x_0$ takav da je

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \text{za sve } x \in D \cap I.$$

Primjer.

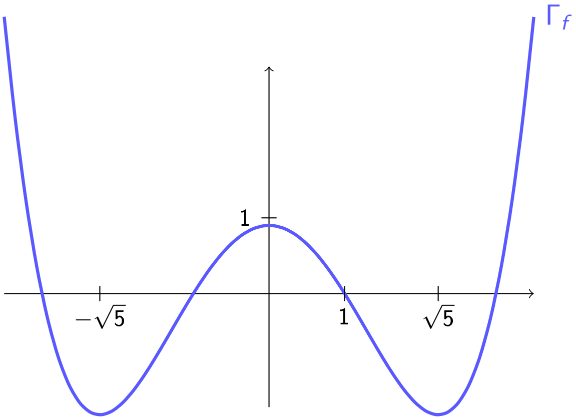


Primjer.



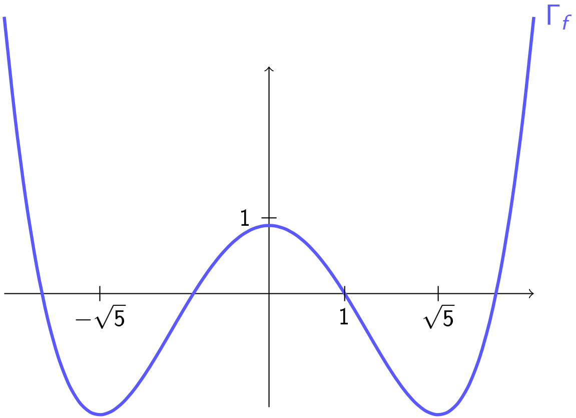
Točke lokalnog minimuma:

Primjer.



Točke lokalnog minimuma: $-\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$.

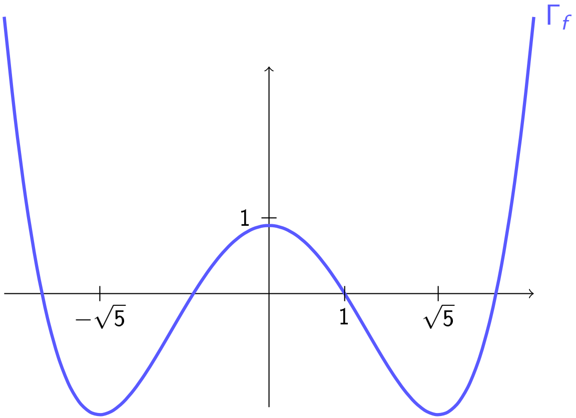
Primjer.



Točke lokalnog minimuma: $-\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$.

Točke lokalnog maksimuma:

Primjer.

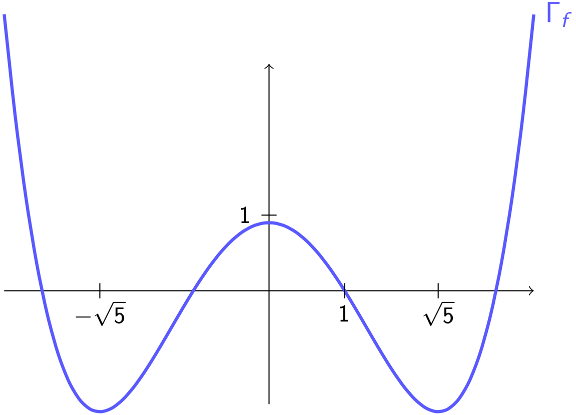


Točke lokalnog minimuma: $-\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$.

Točke lokalnog maksimuma: 0.

4. korak

Primjer.

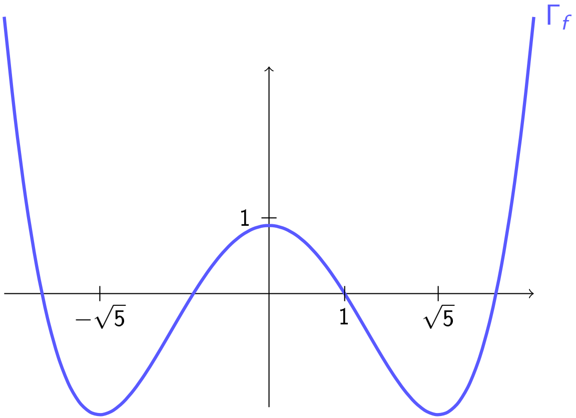


Točke lokalnog minimuma: $-\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$.

Točke globalnog minimuma:

Točke lokalnog maksimuma: 0.

Primjer.

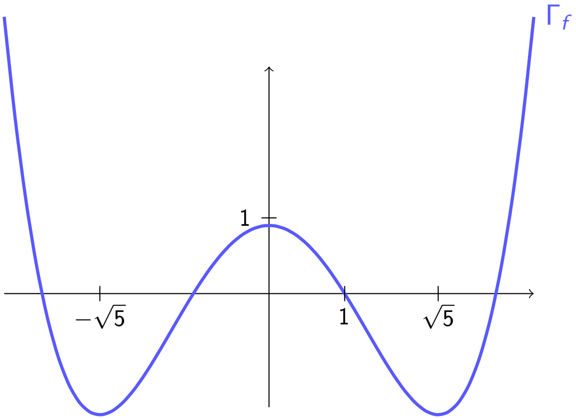


Točke lokalnog minimuma: $-\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$.

Točke globalnog minimuma: $-\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$.

Točke lokalnog maksimuma: 0.

Primjer.



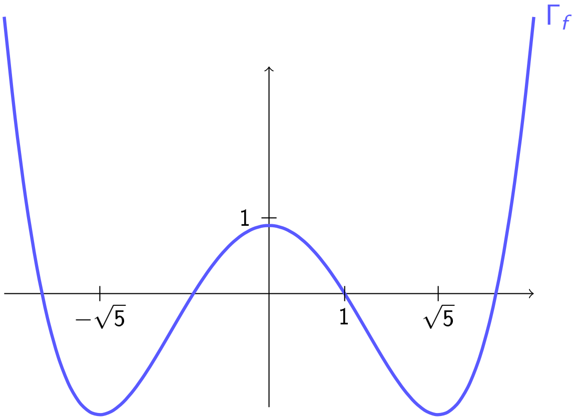
Točke lokalnog minimuma: $-\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$.

Točke lokalnog maksimuma: 0.

Točke globalnog minimuma: $-\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$.

Točke globalnog maksimuma:

Primjer.



Točke lokalnog minimuma: $-\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$.

Točke lokalnog maksimuma: 0.

Točke globalnog minimuma: $-\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$.

Točke globalnog maksimuma: nema ih.

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

Teorem. Neka je $I \subseteq D$ interval. Tada vrijedi:

- Ako je $f' > 0$ na I, tada f **strogo raste** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

- Ako je $f' < 0$ na I, tada f **strogo pada** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

Teorem. Neka je $I \subseteq D$ interval. Tada vrijedi:

- Ako je $f' > 0$ na I, tada f **strogo raste** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

- Ako je $f' < 0$ na I, tada f **strogo pada** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Rubovi intervala na kojima je ili $f' > 0$ ili $f' < 0$ ($\rightsquigarrow$ jedini kandidati za rubove intervala rasta i pada):

- rubovi domene D

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

Teorem. Neka je $I \subseteq D$ interval. Tada vrijedi:

- Ako je $f' > 0$ na I, tada f **strogo raste** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$
- Ako je $f' < 0$ na I, tada f **strogo pada** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Rubovi intervala na kojima je ili $f' > 0$ ili $f' < 0$ ($\rightsquigarrow$ jedini kandidati za rubove intervala rasta i pada):

- rubovi domene D
- točke $x \in D$ u kojima f' nije definirana ili nije neprekidna

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

Teorem. Neka je $I \subseteq D$ interval. Tada vrijedi:

- Ako je $f' > 0$ na I, tada f **strogo raste** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$
- Ako je $f' < 0$ na I, tada f **strogo pada** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Rubovi intervala na kojima je ili $f' > 0$ ili $f' < 0$ ($\rightsquigarrow$ jedini kandidati za rubove intervala rasta i pada):

- rubovi domene D
- točke $x \in D$ u kojima f' nije definirana ili nije neprekidna
- **stacionarne točke** funkcije f: $x \in D$ za koje je $f'(x) = 0$.

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right)$

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 3(x-1)(x-3)$

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 3(x-1)(x-3)$ $\rightsquigarrow$ Stacionarne točke: 1, 3.

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 3(x-1)(x-3)$ $\rightsquigarrow$ Stacionarne točke: 1, 3.

	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f				
f'				

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 3(x-1)(x-3)$ $\rightsquigarrow$ Stacionarne točke: 1, 3.

	$-\infty$	1	3 $+\infty$
f			
f'	$+$	$-$	$+$

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 3(x-1)(x-3)$ $\rightsquigarrow$ Stacionarne točke: 1, 3.

	$-\infty$ 1	1 3	3 $+\infty$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
f'	$+$	$-$	$+$

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 3(x-1)(x-3)$ $\rightsquigarrow$ Stacionarne točke: 1, 3.

	$-\infty$	lok. max 1	lok. min 3	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
f'	$+$	$-$	$+$	

4. korak

Odredimo **intervale rasta i pada** te **lokalne i globalne ekstreme** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 3(x-1)(x-3) \quad \rightsquigarrow$ Stacionarne točke: 1, 3.

	$-\infty$	lok. max 1	lok. min 3	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
f'	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \leftarrow$		$\rightarrow +\infty$	

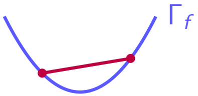
5. korak

Odredimo **intervale konveksnosti i konkavnosti** funkcije f.

Odredimo **intervale konveksnosti i konkavnosti** funkcije f.

Teorem. Neka je $I \subseteq D$ interval. Tada vrijedi:

- Ako je $f'' > 0$ na I, tada je f **konveksna** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ je dužina s rubovima $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ iznad Γ_f.

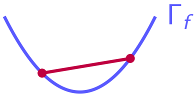


5. korak

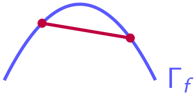
Odredimo **intervale konveksnosti i konkavnosti** funkcije f.

Teorem. Neka je $I \subseteq D$ interval. Tada vrijedi:

- Ako je $f'' > 0$ na I, tada je f **konveksna** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ je dužina s rubovima $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ iznad Γ_f.



- Ako je $f'' < 0$ na I, tada je f **konkavna** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ je dužina s rubovima $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ ispod Γ_f.

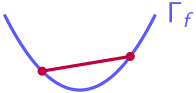


5. korak

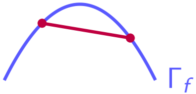
Odredimo **intervale konveksnosti i konkavnosti** funkcije f.

Teorem. Neka je $I \subseteq D$ interval. Tada vrijedi:

- Ako je $f'' > 0$ na I, tada je f **konveksna** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ je dužina s rubovima $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ iznad Γ_f.



- Ako je $f'' < 0$ na I, tada je f **konkavna** na I, tj. za sve $x_1, x_2 \in I$ je dužina s rubovima $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ ispod Γ_f.



Jedini kandidati za rubove intervala konveksnosti/konkavnosti:

- rubovi domene D
- točke $x \in D$ u kojima f'' nije definirana ili nije neprekidna
- točke $x \in D$ za koje je $f''(x) = 0$.

5. korak

Odredimo **intervale konveksnosti i konkavnosti** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

5. korak

Odredimo **intervale konveksnosti i konkavnosti** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.

Odredimo **intervale konveksnosti i konkavnosti** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

Odredimo **intervale konveksnosti i konkavnosti** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad \rightsquigarrow \quad f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$.

Odredimo **intervale konveksnosti i konkavnosti** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad \rightsquigarrow \quad f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2) \quad \rightsquigarrow \quad f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$.

5. korak

Odredimo **intervale konveksnosti i konkavnosti** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad \rightsquigarrow \quad f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2) \quad \rightsquigarrow \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

	$-\infty$ to 2	2 to $+\infty$
f		
f''		

5. korak

Odredimo **intervale konveksnosti i konkavnosti** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad \rightsquigarrow \quad f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2) \quad \rightsquigarrow \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

	$-\infty$ do 2	2 do $+\infty$
f		
f''	$-$	$+$

5. korak

Odredimo **intervale konveksnosti i konkavnosti** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

- $D = \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad$ Rubovi domene: $-\infty$, $+\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad \rightsquigarrow \quad f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2) \quad \rightsquigarrow \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$\cap$	$\cup$	
f''	$-$	$+$	

6. korak

Odredimo **asimptote** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

6. korak

Odredimo **asimptote** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Funkcija f je polinom stupnja > 1 pa nema asimptota.

6. korak

Odredimo **asimptote** funkcije f.

$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Funkcija f je polinom stupnja > 1 pa nema asimptota.

Detaljnije o određivanju asimptota malo kasnije.

7. korak

Rezultate koraka 3 – 6 korisno je unijeti u zajedničku tablicu.

Dakle, na vrhu tablice su kandidati za rubove intervala pozitivnosti/negativnosti, rasta/pada odnosno konveksnosti/konkavnosti.

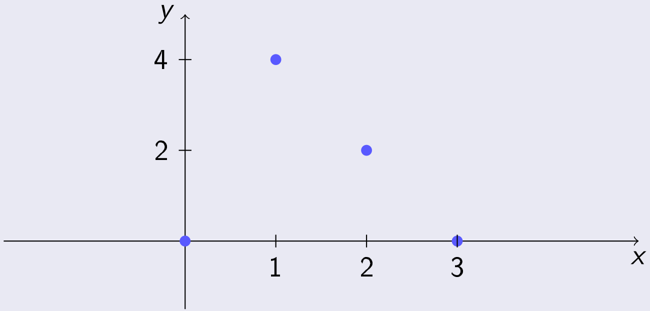
	$-\infty$		0		lok. max 1		2		lok. min 3		$+\infty$
f	$\times$	$\nearrow$ $-$ $\cap$	0	$\nearrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cup$	0	$\nearrow$ $+$ $\cup$	$\times$
f'	$\times$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$\times$
f''	$\times$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$\times$
$f(x)$		$-\infty \leftarrow$	0		4		2		0	$\rightarrow +\infty$	

Temeljem tablice iz 7. koraka skiciramo Γ_f.

	$-\infty$		0		1 (lok. max)		2		3 (lok. min)		$+\infty$
f	$\times$	$\nearrow$ $-$ $\cap$	0	$\nearrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cup$	0	$\nearrow$ $+$ $\cup$	$\times$
f'	$\times$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$\times$
f''	$\times$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$\times$
$f(x)$		$-\infty \leftarrow$	0		4		2		0	$\rightarrow +\infty$	

Temeljem tablice iz 7. koraka skiciramo Γ_f.

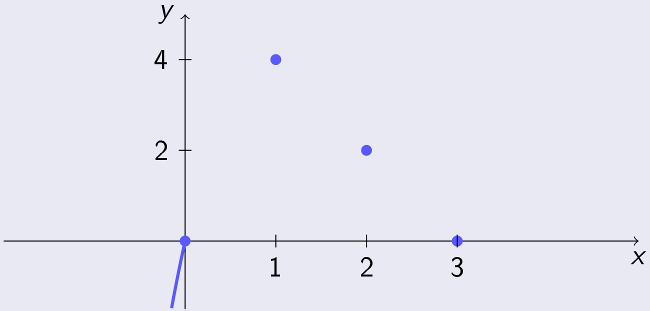
	$-\infty$		0		lok. max 1		2		lok. min 3		$+\infty$
f	$\times$	$\nearrow$ $-$ $\cap$	0	$\nearrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cup$	0	$\nearrow$ $+$ $\cup$	$\times$
f'	$\times$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$\times$
f''	$\times$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$\times$
$f(x)$		$-\infty \leftarrow$	0		4		2		0	$\rightarrow +\infty$	



8. korak

Temeljem tablice iz 7. koraka skiciramo Γ_f.

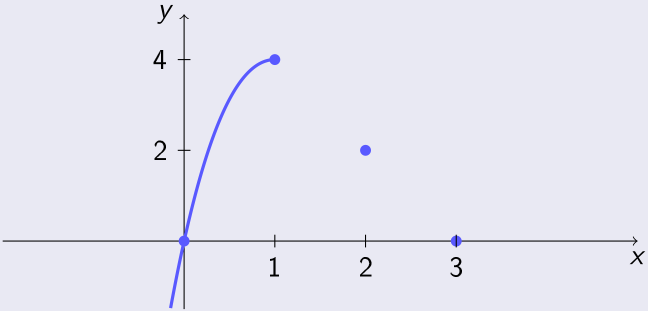
					lok. max				lok. min		
	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
f	$\times$	$\nearrow$ $-$ $\cap$	0	$\nearrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cup$	0	$\nearrow$ $+$ $\cup$	$\times$
f'	$\times$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$\times$
f''	$\times$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$\times$
$f(x)$	$-\infty \leftarrow$		0		4		2		0		$\to +\infty$



8. korak

Temeljem tablice iz 7. koraka skiciramo Γ_f.

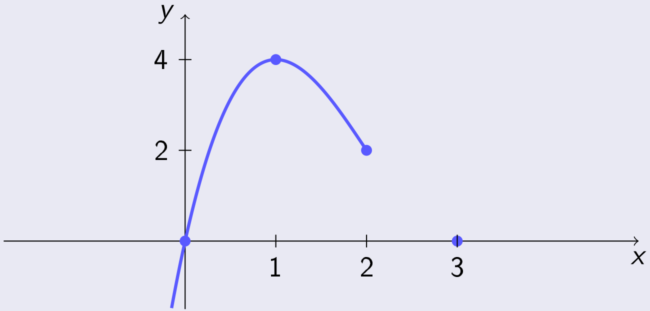
					lok. max				lok. min		
	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
f	$\times$	$\nearrow\ -\ \cap$	0	$\nearrow\ +\ \cap$		$\searrow\ +\ \cap$		$\searrow\ +\ \cup$	0	$\nearrow\ +\ \cup$	$\times$
f'	$\times$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$\times$
f''	$\times$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$\times$
$f(x)$		$-\infty \leftarrow$	0		4		2		0	$\rightarrow +\infty$	



8. korak

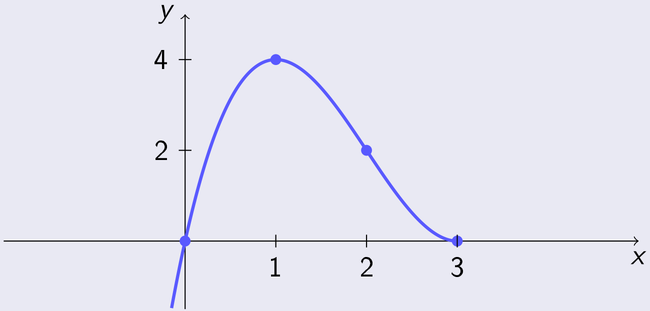
Temeljem tablice iz 7. koraka skiciramo Γ_f.

	$-\infty$		0		lok. max 1		2		lok. min 3		$+\infty$
f	$\times$	$\nearrow$ $-$ $\cap$	0	$\nearrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cup$	0	$\nearrow$ $+$ $\cup$	$\times$
f'	$\times$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$\times$
f''	$\times$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$\times$
$f(x)$		$-\infty \leftarrow$	0		4		2		0	$\rightarrow +\infty$	



Temeljem tablice iz 7. koraka skiciramo Γ_f.

					lok. max				lok. min		
	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
f	$\times$	$\nearrow$ $-$ $\cap$	0	$\nearrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cup$	0	$\nearrow$ $+$ $\cup$	$\times$
f'	$\times$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$\times$
f''	$\times$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$\times$
$f(x)$		$-\infty \leftarrow$	0		4		2		0	$\rightarrow +\infty$	



8. korak

Temeljem tablice iz 7. koraka skiciramo Γ_f.

					lok. max				lok. min		
	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
f	$\times$	$\nearrow$ $-$ $\cap$	0	$\nearrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cap$		$\searrow$ $+$ $\cup$	0	$\nearrow$ $+$ $\cup$	$\times$
f'	$\times$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$\times$
f''	$\times$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$\times$
$f(x)$		$-\infty \leftarrow$	0		4		2		0	$\rightarrow +\infty$